Summer Math Camp Tarvisio - 20/24 Agosto 2024

Esercizi di combinatoria - corso intermedio

1. Calcolare:

a) $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + ... + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}$ b) $\binom{20}{0} - \binom{20}{1} + ... - \binom{20}{19} + \binom{20}{20}$

c) $\binom{20}{1} + \binom{20}{3} + ... + \binom{20}{17} + \binom{20}{19}$ d) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} \cdot 2 + ... + \binom{10}{9} \cdot 2^9 + \binom{10}{10} \cdot 2^{10}$

2. Quanto vale la somma $\binom{10}{0}^2 + \binom{10}{1}^2 + ... + \binom{10}{9}^2 + \binom{10}{10}^2$?

3. Quanto vale la somma: $(1) + (1+2) + (1+2+3) + ... + (1+2+...+2023+2024)$?

4. Dato A $= \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$, in quanti modi posso scegliere un sottoinsieme B di 5 elementi in modo che la differenza tra due qualsiasi di questi sia almeno 3?

5. a) Quanto vale la probabilità di ottenere 3 teste e 4 croci (esattamente in questo ordine) lanciando una moneta regolare per 7 volte consecutive?
b) Come cambia la risposta se non interessa l'ordine di apparizione delle 3 teste e delle 4 croci?
c) Come nel punto b) ma nell'ultimo lancio deve uscire testa.

6. Si parte dalla sequenza 0123456789. Una mossa consiste nel prendere uno dei dieci caratteri e spostarlo all'inizio (ad esempio scegliendo 4 e poi 8 si ottiene 8401235679).
Quante sono le terne ordinate di mosse che generano una sequenza in cui il "2" e il "5" sono vicini?

7. Sia n intero positivo e $a_1, ..., a_n$ interi positivi distinti tali che $mcm(a_1, ..., a_n) = 160$.
Quante sono le possibili n-ple che verificano la condizione?

8. a) Detto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dire quante sono le funzioni f : A $\rightarrow$ A tali che:
per ogni $n \in A$ si ha $f(n) \neq n$ ma $f^5(n) = n$.
b) Come sopra ma $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f(n) \neq n$, $f^6(n) = n$ per ogni n.

9. a) Un bambino deve scegliere 16 caramelle di tre gusti diversi A, B, C.
In quanti casi può fare in modo di averne esattamente 3 di almeno un gusto?
b) Come sopra ma i gusti sono quattro A, B, C, D e deve averne esattamente 4 di almeno un gusto.

10. Un quadrato Q è suddiviso in nove caselle quadrate uguali che possono essere colorate o di bianco o di nero. Quante diverse colorazioni fanno in modo che l'insieme B costituito da tutte le caselle bianche e l'insieme N costituito da tutte le caselle nere siano insiemi connessi?
Un sottoinsieme di caselle $X \subseteq Q$ si dice connesso se:
a) X è composto da zero caselle o da una casella;
b) X è composto da almeno due caselle e per ogni coppia a, b di caselle in X esiste un percorso costituito da caselle di X, adiacenti a due a due (hanno un lato in comune), che porta da a a b.

11. Una pulce parte dal quadrato centrale di una tabella 3 x 3 e, per ogni salto che compie, si può spostare con la stessa probabilità in uno dei quadrati vicini (quadrati che hanno esattamente o un lato in comune o un vertice in comune con il quadrato di partenza).
Quanto vale la probabilità che dopo 3 salti la pulce si trovi nella casella in alto a sinistra?

12. Un docente assegna 5 esercizi a 4 studenti. Ciascuno studente deve scegliere 2 esercizi "a caso" tra i 5, in modo indipendente dai suoi compagni. Quanto vale la probabilità che ciascun esercizio venga scelto da almeno uno studente? Moltiplicare il risultato per 10000.

13. In un piano sono date 8 rette incidenti a due a due.
Nessun punto del piano appartiene a più di due tra queste 8 rette.
Sia A l'insieme dei punti che appartengono a due rette.
Calcolare quante sono le collezioni non ordinate di 8 punti di A che non contengono 3 punti appartenenti ad una stessa retta (si intende ad una stessa retta tra le 8 date inizialmente).

14. Quante sono le terne di interi positivi (x, y, z) con $x < y < z$, tali che $xyz = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)^2$?

Risposte da non sbirciare prima di aver provato per un tempo adeguato

1. a) $(1+1)^2 = 2^{20}$ b) $(1-1)^{20} = 0$ c) 2^{19} d) $(1+2)^{10} = 3^{10}$ **2.** $\binom{20}{10}$

3. $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + ... + \binom{2024}{2} + \binom{2025}{2} = \binom{2026}{3}$ **4.** $\binom{12}{5,7}$ con stars and bars

5. a) 2^{-7} b) $\binom{7}{3,4} \cdot 2^{-7}$ c) $\binom{6}{2,4} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-1}$ **6.** 82 (sono 5 casi)

7. $2^{11} + 2^{10} - 2^5$ **8.** a) $(5-1)! = 24$ b) $5! + \frac{\binom{6}{2,2,2}}{3!} \cdot 1^3 + \frac{\binom{6}{3,3}}{2!} \cdot 2^2 = 175$

9. a) $3 \cdot \binom{13+1}{1} - 3 \cdot 1 + 0 = 39$ b) $4 \cdot \binom{12+2}{2} - 6 \cdot \binom{8+1}{1} + 4 \cdot 1 - 1 = 313$

10. $2 \cdot (1 + 9 + 12 + 16 + 16) = 108$ **11.** $\frac{26}{75} : 4 = \frac{13}{150}$

12. $10^4 \cdot 10^{-4} \cdot \left[\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{2}^4 - \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4\right] = 4320$

13. $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = \frac{(3-1)!}{2} = 1$ $x_4 = \frac{3!}{2} = 3$ $x_5 = \frac{4!}{2} = 12$

$x_6 = \frac{5!}{2} + \frac{\binom{6}{3,3}}{2!} \cdot x_3^2 = 70$ $x_7 = \frac{6!}{2} + \binom{7}{4,3} \cdot x_4 \cdot x_3 = 465$, x_6 e x_7 non servono ai fini del risultato

$x_8 = \frac{7!}{2} + \binom{8}{5,3} \cdot x_5 \cdot x_3 + \frac{\binom{8}{4,4}}{2} \cdot x_4^2 = 3507$

14.

$$\frac{C^*_{2,3} - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + 0}{3!} = \frac{6^5 - 3 \cdot 2^5}{6} = 1280$$